Мощность множества

Множествами A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить биекцию. Ясно, что „быть равномощными" – отношение эквивалентности и для конечных множеств оно согласуется с равенством мощностей. Множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$, называется *счётным*.

1. Докажите счётность множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$.
2. Докажите, что любое подмножество счётного множества конечно или счётно.
3. Докажите, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
4. Докажите, что промежутки $[0, 1]$ и $(0, 10)$ равномощны.
5. Придумайте биекцию между множествами всех бесконечных последовательностей, состоящих из $0, 1, 2$ и всех бесконечных последовательностей, состоящих из $0, 1$.
6. По плоскости бегает невидимый таракан, который стартует из точки с рациональными координатами и каждую секунду перемещается на вектор с рациональными координатами. В любую секунду можно выбрать точку и ударить по ней. Докажите, что есть стратегия, позволяющая гарантированно прихлопнуть таракана за конечное время.
7. Является ли счётным множество алгебраических чисел?
8. Бесконечное множество M вещественных чисел таково, что сумма чисел любого его подмножества ограничена. Докажите, что M счётно.
9. Докажите, что любое из следующих множеств не более чем счётно:
   (a) набор непересекающихся интервалов числовой прямой;
   (b) множество точек, в которых происходит скачок монотонной функции;
   (c) множество точек строгого локального максимума функции вещественного аргумента счётно.